

Estimation numérique de la vitesse de décroissance des spectres de puissance

This article has been downloaded from IOPscience. Please scroll down to see the full text article.

1997 J. Phys. A: Math. Gen. 30 2197

(<http://iopscience.iop.org/0305-4470/30/6/038>)

View [the table of contents for this issue](#), or go to the [journal homepage](#) for more

Download details:

IP Address: 171.66.16.112

The article was downloaded on 02/06/2010 at 06:14

Please note that [terms and conditions apply](#).

Estimation numérique de la vitesse de décroissance des spectres de puissance

Numerical estimation of the fall-off rates of spectral densities

Cyrille Rustom† and Jacques Bélair†‡¶

† Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal, Montréal, Québec H3C 3J7, Canada

‡ Centre de recherches mathématiques, Université de Montréal, Montréal, Québec H3C 3J7, Canada

¶ Centre for Nonlinear Dynamics in Physiology and Medicine, McGill University, Montreal, Quebec H3G 1Y6, Canada

Received 4 June 1996

Résumé. Les signaux ayant des spectres de puissance dont la décroissance est en $1/f^\alpha$ ont traditionnellement vu leur exposant estimé par une régression linéaire sur un graphique log–log. Un problème méthodologique survient lorsque le spectre de puissance du signal possède des zéros: cela introduit en effet des pôles dans la représentation log–log rendant toute régression au niveau du spectre très périlleuse. Nous présentons une méthode qui permet d'éviter ces valeurs extrêmes en ne faisant, au niveau de la représentation log–log, qu'une régression sur un sous-ensemble choisi de maxima locaux. D'autre part, il est bien connu que la dimension fractale de fonctions de Hölder d'exposant α auto-affines est $(5 - \alpha)/2$, ce qui permet, en particulier, de pouvoir juger de la qualité d'une estimation obtenue par la méthode précédente pour la dimension fractale de la fonction introduite par Kieswetter. Le comportement de la méthode est analysé à partir du spectre de puissance de fonctions lisses, sans que le résultat estimé ne puisse être utilisé pour obtenir la dimension fractale du signal (qui n'est pas auto-affine). Finalement, nous examinons les limitations des méthodes d'analyse spectrale pour l'estimation d'une vitesse de décroissance algébrique.

Abstract. Signals with $1/f^\alpha$ spectral densities have traditionally had the exponent α estimated by linear regression on a log–log plot. This is problematic when the spectrum of the signal crosses zero because this introduces poles in the log plot of the spectrum. We present a method which avoids these extreme values, namely doing a regression on a subset of local maxima on the same log–log plot. Self-affine functions with Hölder exponent α are well known to have the fractal dimension $(5 - \alpha)/2$, and we thus estimate the fractal dimension of the function introduced by Kieswetter. On smooth functions, the new method is tested on log–log representation of power spectra, but no relation can be established with the fractal dimension of the signal (due to lack of self-affinity). The limitations of spectral analysis methods for estimation of algebraic fall-off rates are discussed.

Introduction

Les fractales et la dynamique non linéaire ont pénétré la plupart des domaines scientifiques (Peitgen *et al* 1992) en fournissant un support assez flexible et surtout, suffisamment puissant, pour pouvoir faciliter l'étude de systèmes ayant une dynamique complexe et être

ainsi utilisables dans des disciplines aussi variées que les mathématiques appliquées, la physique, les télécommunications, l'audiovisuel et la médecine.

Dans le domaine de la biologie, et plus particulièrement dans celui de la physiologie cardiaque, l'emploi de la vitesse de décroissance des spectres de puissance de signaux a été suggérée (Goldberger *et al* 1985). Cet usage repose sur un lien implicite entre la physiologie normale du muscle cardiaque, et une composante chaotique de la dynamique de ce muscle. Comme l'onde de dépolarisation des cellules musculaires des ventricules se propage à travers les fibres du réseau de Purkinje, ces auteurs postulent un lien dynamique entre la structure anatomique, fractale, du réseau de Purkinje et la vitesse de décroissance algébrique en fréquence (bruit) du spectre de puissance de complexes QRS humains. Cette hypothèse est en partie rejetée à l'heure actuelle (Chialvo et Jalife 1991, Lewis et Guevara 1991) puisque le même type de comportement du spectre de puissance peut survenir dans des signaux clairement non chaotiques, et aussi, dans des préparations expérimentales biologiques n'ayant aucun caractère fractal.

Toutes ces évaluations quantitatives de vitesse de décroissance sont effectuées par une régression linéaire. Nous présentons dans cette note une faille méthodologique inhérente à cette manière de procéder, de même qu'une méthode pour y remédier. Nous avons ainsi développé un algorithme qui ne dépend que du nombre de points disponibles expérimentalement, et non de la précision numérique utilisée. Ainsi, plus ce nombre de points est important et plus le résultat obtenu dans l'estimation de l'exposant caractérisant la vitesse de décroissance du spectre sera précis. Aussi étrange que cela puisse sembler, ce n'était pas le cas des méthodes employées auparavant (et encore possiblement en usage).

Nous introduisons d'abord les notations utilisées, la terminologie employée et l'énoncé précis du problème relevé. Les deux sections suivantes sont consacrées à la résolution analytique de certains exemples puis à une considération numérique, toutes deux étayées de plusieurs cas qui illustrent les points cruciaux et les limites de notre méthode. Nous montrons en particulier que ces limites sont liées à l'interprétation que l'on fait du théorème sur lequel la méthode repose, et que l'usage a peu à peu banalisé.

0. Préliminaires

0.1. Spectres de puissance et décroissance algébrique

Nous considérons des fonctions à support compact, qui représentent une impulsion extraite d'un signal expérimental à peu près périodique (par exemple un épisode d'un complexe QRS dans un électrocardiogramme). L'origine des temps ($t = 0$) étant arbitraire, nous considérons seulement des fonctions paires. Soit donc $g(t)$ une fonction paire à support compact pour laquelle on définit la transformée de Fourier $Tg(\omega)$ par

$$Tg(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt$$

où, bien sûr, $i^2 = -1$, et ω prend toute valeur réelle non négative. Cette intégrale converge, et on peut écrire:

$$Tg(\omega) = 2 \int_0^{\infty} g(t) \cos(\omega t) dt.$$

On appelle spectre de puissance $S(\omega)$ le module au carré de $Tg(\omega)$ (Papoulis 1965),

$$S(\omega) = |Tg(\omega)|^2 = Tg(\omega)^2 = 4 \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cos(\omega t) dt \right]^2.$$

A cause de son interprétation en géométrie fractale, et, en particulier, de sa relation avec la dimension de la courbe tracée par le graphe de la fonction $g(\omega)$, un grand intérêt a été porté à la vitesse de décroissance asymptotique ($\omega \rightarrow \infty$) de $S(\omega)$. En particulier, lorsque $S(\omega)$ décroît en $1/\omega^\alpha$ on dit qu'on a un bruit en $\omega^{-\alpha}$ (Keshner 1982), et un bruit en ω^0 est appelé bruit blanc.

D'une part, le bruit blanc est alors, par définition, un processus stochastique dont le spectre a un comportement constant: cette réalisation peut être celle, par exemple, du mouvement Brownien fractal. D'autre part, la dimension de Bouligand (ou 'box counting') d'une fonction est la dimension fractale la plus souvent employée dans les applications: elle mesure essentiellement une loi d'échelle pour le recouvrement du graphe de la fonction par des rectangles de côtés de plus en plus petits. Pour une fonction auto-affine continue, avec un exposant de Hölder presque partout le même, cet exposant peut être relié à la dimension de Bouligand et à la vitesse de décroissance du spectre de la fonction (Tricot 1988).

Rappelons quelques définitions et théorèmes. Soit E un sous-ensemble non vide de \mathbb{R}^n . On note $N_\delta(E)$ le plus petit nombre d'ensembles de diamètre au plus δ recouvrant E . La dimension de Bouligand, ou dimension des boîtes, est définie à l'aide des dimensions supérieure et inférieure d'un tel sous-ensemble E :

$$\overline{\dim}_B E = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log[N_\delta(E)]}{-\log(\delta)} \quad \underline{\dim}_B E = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log[N_\delta(E)]}{-\log(\delta)}. \quad (1)$$

Quand ces deux équations sont égales on parle alors de la dimension de Bouligand de E , donnée par:

$$\dim_B E = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log[N_\delta(E)]}{-\log(\delta)} \quad (2)$$

Dans le cas où E est défini comme le graphe d'une fonction f continue, il est possible de voir ce sous-ensemble comme une fractale. Il suffit pour cela que f soit suffisamment irrégulière pour que la dimension de son graphe soit strictement supérieure à 1. En supposant que f satisfasse des équations de type Hölder on peut établir le théorème suivant (Falconer 1990).

Théorème 1. Soit f une fonction continue définie de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .

(i) Supposons que

$$|f(u) - f(v)| \leq c|u - v|^{2-s} \quad (0 \leq u, v \leq 1) \quad (3)$$

où c est une constante strictement positive, $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $1 \leq s \leq 2$. Alors $\overline{\dim}_B \text{graph} f \leq s$. (Ceci reste vrai si l'hypothèse initiale est valide localement, c'est-à-dire quand $|u - v| < \delta$ pour un certain $\delta > 0$.)

(ii) Supposons qu'il existe des nombres $c > 0$, $\delta_0 > 0$ et $1 \leq s < 2$ avec la propriété que pour chaque $u \in [0, 1]$ et $0 < \delta \leq \delta_0$ il existe un v tel que

$$|u - v| < \delta \quad \text{et} \quad |f(u) - f(v)| \geq c\delta^{2-s} \quad (4)$$

Alors $s \leq \underline{\dim}_B \text{graph}$.

L'hypothèse (i) assure que f est une fonction de Hölder d'exposant $2 - s$, possiblement seulement localement. Cette hypothèse permet de contrôler l'irrégularité de f , puisque la croissance de f sur l'intervalle (u, v) est toujours plus petite que $c|u - v|^{2-s}$. L'hypothèse (ii) garantit que f est suffisamment irrégulière pour que l'on puisse parler effectivement de courbe fractale.

Nous allons supposer que le signal $g(t)$ satisfait à la fois (3) localement et vérifie une propriété supplémentaire locale impliquant (4): en tout point $(u, g(u))$ du graphe de $g(t)$,

il existe une constante c et un intervalle de diamètre 2δ , centré en u , tel que pour tout v dans cet intervalle on ait:

$$|g(u) - g(v)| \geq c\delta^{2-s} \geq c|u - v|^{2-s}. \quad (5)$$

Il est clair que (5) implique (4) et non l'inverse. Il est mentionné vaguement dans la littérature que le signal $g(t)$ doit satisfaire (4) de façon assez uniforme vis à vis de t . Ceci signifie en fait que $g(t)$ satisfait (5).

Si $g(t)$ vérifie (4) et (5) il est équivalent de dire que la fonction d'autocorrélation de $C(t)$,

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(h)g(h+t) dh \quad (6)$$

satisfait, pour t petit, (démonstration analogue de Falconer (1990))

$$C(0) - C(t) \approx ct^{4-2s}. \quad (7)$$

Ainsi, si la fonction d'autocorrélation $C(t)$ a un comportement en t^{4-2s} pour t petit, la dimension de Bouligand du graphe de g est s . Du comportement de $C(t)$ pour t petit, on déduit celui de $S(\omega)$ pour ω grand, puisque la transformée de Fourier de $C(t)$ est précisément $S(\omega)$:

$$TC(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C(t)e^{-i\omega t} dt = S(\omega). \quad (8)$$

C'est cette dernière équation qui justifie toute l'importance accordée à $C(t)$ dans la détermination de $S(\omega)$. Par la formule d'inversion des transformées de Fourier, on a dans (8),

$$C(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos(\omega t) d\omega \quad (9)$$

ou

$$C(0) - C(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega)(1 - \cos(\omega t)) d\omega. \quad (10)$$

L'estimé (7) et le théorème 2 de la prochaine section établissent le lien entre la dimension de Bouligand du graphe de $g(t)$ et la décroissance algébrique (en $\omega^{-\alpha}$) de $S(\omega)$.

0.2. Lien entre la dimension de Bouligand s et l'exposant α dans le cas où $S(\omega)$ se comporte comme $\omega^{-\alpha}$

Lorsque le spectre de puissance se comporte en $\omega^{-\alpha}$, pour ω grand, il faut évaluer le comportement pour t petit de l'intégrale dans l'égalité (10), puis le comparer avec le comportement donné par (7). Ceci permet d'obtenir la relation bien connue

$$s = \frac{(5 - \alpha)}{2} \quad (11)$$

qui n'est, comme nous le verrons plus bas, qu'une condition nécessaire pour conclure à l'existence d'un caractère fractal pour la fonction g . Consacrer un théorème à ce calcul est nécessaire pour s'assurer du bien-fondé de la méthode, en dégageant des conditions suffisantes sur les paramètres pour justifier les calculs menant à l'équation (11). Nous verrons que l'intégrale (9) n'existe que pour $1 < \alpha < 3$, ce qui restreint la dimension fractale du signal entre 1 et 2, condition nécessaire pour représenter le graphe d'une fonction continue. Ce résultat est à la fois réconfortant, puisqu'il s'agit de courbes planes, et quelque

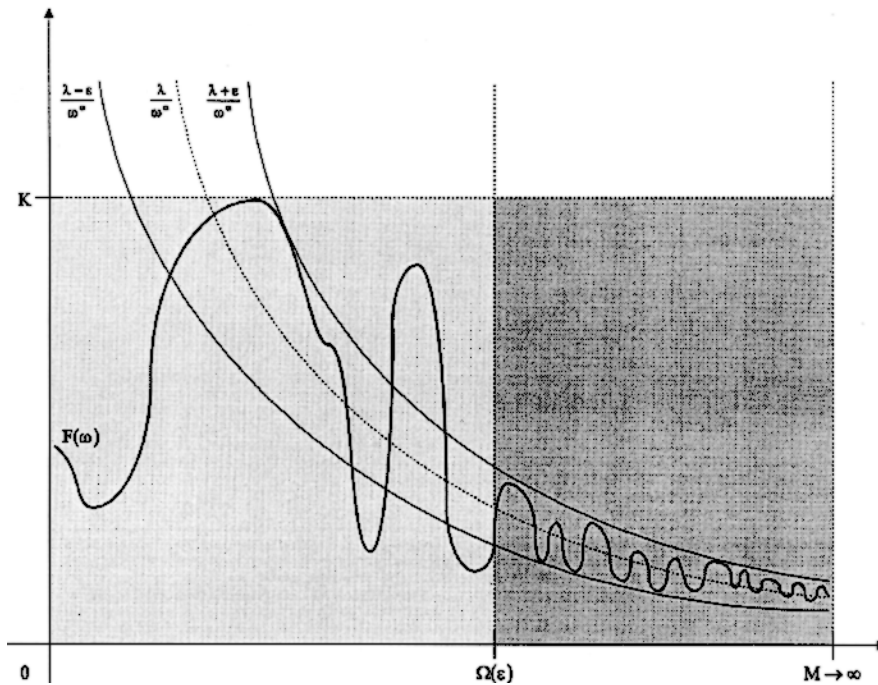


Figure 1. Représentations graphiques des trois propriétés de la fonction $F(\omega)$ du théorème 2. Pour un ϵ donné, il existe $\Omega(\epsilon)$ à partir duquel $F(\omega)$ est comprise entre deux courbes du même type $\lambda\omega^{-\alpha}$ disposés à une distance de $\pm\epsilon\omega^{-\alpha}$. Les deux zones représentent la séparation du domaine de $I(t)$ en deux sous- domaines sur lesquels les hypothèses (i) et (ii) pour la zone gris clair, et (iii) pour la zone gris foncé sont exploitées.

Graphical representation of the three properties of the function $F(\omega)$ detailed in theorem 2. For all ϵ , there is an $\Omega(\epsilon)$ beyond which $F(\omega)$ is bounded between two curves of the form $\lambda\omega^{-\alpha}$, the distance between the two going as $\pm\epsilon\omega^{-\alpha}$. The two zones where the hypotheses on the domain of $I(t)$ ((i) and (ii) in light grey, (iii) in dark grey) are displayed.

peu étonnant, car la seule propriété imposée à $S(\omega)$ est de se comporter en $\omega^{-\alpha}$ pour ω grand, ce qui, en principe, n'a aucun rapport avec des notions de dimension.

L'énoncé du théorème 2 permet de préciser le comportement d'une fonction $F(\omega)$ en $\omega^{-\alpha}$ (hypothèse iii) et de définir le comportement de l'intégrale $I(t)$ de l'équation (12). La figure 1 illustre les hypothèses (i), (ii) et (iii).

Théorème 2. Soit $F(\omega)$ une fonction positive continue, bornée sur \mathbb{R}_+ , ayant pour un $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ un comportement en $\lambda\omega^{-\alpha}$ ($\omega \rightarrow \infty$), c'est-à-dire:

(i) $\forall \omega \in \mathbb{R}_+ F(\omega) \geq 0$

(ii) $\exists K \in \mathbb{R}_+^* | \forall \omega \in \mathbb{R}_+ F(\omega) < K$

(iii) $\forall \epsilon > 0 \exists \Omega \in \mathbb{R}_+^* | \forall \omega \in \mathbb{R}_+^* (\omega > \Omega \Rightarrow |F(\omega) - \lambda\omega^{-\alpha}| < \epsilon\omega^{-\alpha})$. Alors pour l'intégrale $I(t)$ définie par:

$$I(t) = \int_0^\infty F(\omega)(1 - \cos(\omega t)) d\omega \tag{12}$$

si $1 < \alpha < 3$, on a

$$\forall \epsilon > 0 \exists t_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^* | \forall t \in \mathbb{R}_+^* (t \ll t_0 \Rightarrow c_1 t^{\alpha-1} < I(t) < c_2 t^{\alpha-1}).$$

Démonstration. Soient $I_b^a(t)$ et $J_\Omega^M(t, \alpha)$ les intégrales positives définies par:

$$I_b^a(t) = \int_a^b F(\omega)(1 - \cos(\omega t)) d\omega = 2 \int_a^b F(\omega) \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) d\omega \quad (13)$$

$$J_\Omega^M(t, \alpha) = 2^{2-\alpha} \int_{\frac{\Omega t}{2}}^{\frac{Mt}{2}} \lambda \zeta^{-\alpha} \sin^2(\zeta) d\zeta \quad (14)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\Omega \in \mathbb{R}_+^*$, $M \in \mathbb{R}_+^*$, $M > \Omega$, $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+^*$, $b > a$. Soient $\varepsilon > 0$, $\Omega \in \mathbb{R}_+^*$ de l'hypothèse (iii). Par (13), on peut écrire

$$I(t) = I_0^\Omega(t) + \lim_{M \rightarrow \infty} I_\Omega^M(t). \quad (15)$$

En bornant $I_0^\Omega(t)$ et $\lim_{M \rightarrow \infty} I_\Omega^M(t)$ à l'aide des trois hypothèses (i), (ii) et (iii), on montre qu'il existe un $K \in \mathbb{R}_+^*$, et, pour $\varepsilon > 0$ donné, un $\Omega \in \mathbb{R}_+^*$ et $t_0 = \frac{1}{\Omega}$ tel que pour tout $0 < t \ll t_0$ on ait:

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) t^{\alpha-1} J_\Omega^\infty(t, \alpha) < I(t) < K \Omega \frac{(\Omega t)^2}{6} + \left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) t^{\alpha-1} J_\Omega^\infty(t, \alpha). \quad (16)$$

Finalement, à condition que $1 < \alpha < 3$ on obtient:

$$c_1 t^{\alpha-1} < I(t) < c_2 t^{\alpha-1} \quad (17)$$

où nous avons posé

$$\begin{cases} c_1 = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda} J_\Omega^\infty\right)(t_0, \alpha) = 2^{2-\alpha} (\lambda - \varepsilon) \int_{\frac{\Omega t_0}{2}}^{\infty} \zeta^{-\alpha} \sin^2(\zeta) d\zeta \\ c_2 = 2\Omega^{\alpha-1} \max\left(\frac{K\Omega}{6}, \frac{\tilde{c}_2}{\Omega^{\alpha-1}}\right) \end{cases}$$

avec $\tilde{c}_2 = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) J_\Omega^\infty(t, \alpha) = 2^{2-\alpha} (\lambda + \varepsilon) \int_0^\infty \zeta^{-\alpha} \sin^2(\zeta) d\zeta$. Alors c_1 et c_2 sont des constantes strictement positives indépendantes de t , et nous avons: pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $t_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que, quelque soit $t \ll t_0$ et $1 < \alpha < 3$ on ait $c_1 t^{\alpha-1} < I(t) < c_2 t^{\alpha-1}$. \square

Puisque $S(\omega)$ satisfait toutes les hypothèses du théorème 2, nous obtenons que $I(t) = C(0) - C(t)$ se comporte comme $t^{\alpha-1}$ lorsque t est petit. En vertu de l'équation (7), il faut donc que l'on ait l'égalité (11):

$$4 - 2s = \alpha - 1 \leftrightarrow s = \frac{(5-\alpha)}{2}$$

0.3. Influence des zéros de $S(\omega)$ sur la précision de α

L'exposant caractérisant la vitesse de décroissance du spectre est typiquement obtenu, en pratique, en traçant un graphique du logarithme de la fonction $S(\omega)$ en fonction du logarithme de la fréquence $\log(\omega)$, puis en effectuant une régression linéaire sur la courbe obtenue.

Indépendamment des considérations statistiques, cette méthode présente un problème sérieux lorsque la fonction $S(\omega)$ possède un zéro. Puisqu'une telle racine se transforme en pôle dans un axe logarithmique des ordonnées, la fonction $\log[S]$ devient infinie. Nous avons représenté dans la figure 2 un diagramme de puissance type où $S(\omega)$ possède plusieurs zéros. Nous remarquons la présence des différents pôles qui font de la courbe définie par $(\log[\omega], \log[S(\omega)])$ une suite de 'bosses' se rétrécissant à mesure que $\log[\omega]$ augmente et que nous appellerons des *lobes*. Cette succession de lobes montre bien qu'il serait très

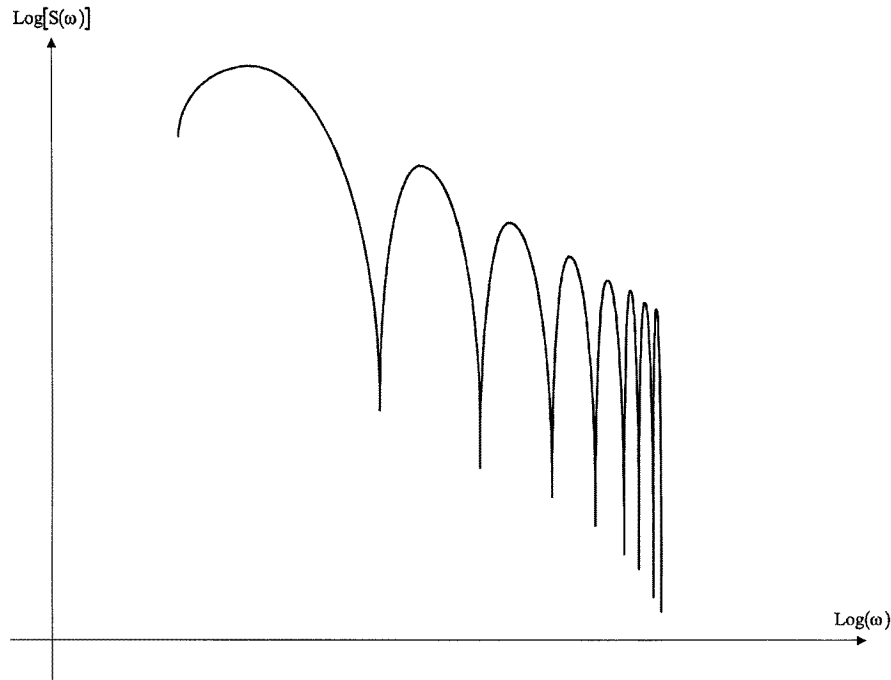


Figure 2. Représentation type de $\log[S(\omega)]$ and fonction de $\log(\omega)$.
Typical representation of $\log[S(\omega)]$ as a function of $\log(\omega)$.

périlleux de tenter une quelconque régression linéaire sur une fonction qui n'est même pas bornée, en théorie.

Cette difficulté semble avoir été escamotée dans la pratique, car la précision employée dans les calculs ne permettait pas de détecter des pôles et donc la présence de lobes. De plus, tout recours à un ordinateur conduit à considérer des ensembles finis de points: lors d'un calcul de transformée de Fourier rapide par exemple, il faut échantillonner le signal à analyser et calculer une transformée de Fourier discrète. L'ensemble des pôles étant restreint comparé au nombre total de données, le résultat de la régression linéaire quantifie, en quelque sorte, un 'équilibre' entre les pôles et les autres données. Cet équilibre (instable) dépend, pour le calcul, de la fréquence d'échantillonnage choisie, du nombre total de données et du nombre de valeurs prises dans les gorges (arbitrairement profondes) situées entre les lobes. On peut donc se retrouver en face du paradoxe suivant: la vitesse d'échantillonnage croît, mais la régression sur le graphique log-log ne s'améliore pas et ne converge pas. Autrement dit, la précision employée dans la mesure du signal augmente mais l'algorithme de détermination de l'exposant α donne une valeur tout à fait arbitraire. C'est cette embarrassante situation que nous cherchons à redresser. Notons que, pour un signal lisse, nous avons considéré dans la figure 2 seulement l'effet des pôles: un spectre de puissance associé à une courbe fractale présente d'autres difficultés, qui seront traitées dans la prochaine section.

0.4. La méthode des maxima

Considérons la fonction $\sin^2(x)/x^2$: elle définit une courbe comprise entre $y = 0$ et $y = x^{-2}$. Ces deux dernières fonctions forment en quelque sorte une *enveloppe* pour

la courbe $\sin^2(x)/x^2$, et le comportement de $\sin^2(x)/x^2$ est en x^{-2} . Puisque $\sin^2(x)/x^2$ est tangente à x^{-2} en leurs points d'intersection, ces derniers approchent très rapidement les maxima locaux de $\sin^2(x)/x^2$. Ceux-ci sont donc approximativement portés par l'enveloppe x^{-2} , et refètent le comportement en x^{-2} de $\sin^2(x)/x^2$.

Les maxima locaux du spectre de puissance $S(\omega)$ contiennent donc le comportement en $\omega^{-\alpha}$ de cette fonction, et leur emploi permet d'éviter l'influence des zéros sur la droite de régression calculée en échelle log-log. Par le théorème 2, à partir d'une certaine fréquence $\Omega \in \mathbb{R}_+^*$ le graphe de $S(\omega)$ en échelle log-log, soit $\{(\log(\omega), \log(S(\omega))) | \omega > \Omega\}$, est borné par deux droites parallèles de pente α dont la distance décroît à mesure que Ω augmente. La façon dont les points sont distribués entre ces deux droites est totalement inconnue, tout comme la distribution des maxima locaux de $S(\omega)$. Cependant, ces derniers sont les points les plus proches de l'enveloppe supérieure de $S(\omega)$. Puisque, par le théorème 2 cette enveloppe existe, il devient alors justifié de les considérer pour le calcul de l'exposant α . On conserve donc les maxima les plus proches de l'enveloppe supérieure, c'est-à-dire que nous considérons *la plus grande sous-suite monotone de maxima locaux* (qui est décroissante) sur laquelle nous effectuons la régression linéaire pour obtenir l'exposant α . En général, aucune autre sous-suite ne garantit la convergence vers l'exposant, et il est très difficile d'estimer une borne inférieure à partir de laquelle il 'suffirait' d'entamer le calcul.

1. Calculs analytiques sur des exemples lisses

Nous avons choisi trois signaux (comme caricatures d'un épisode d'un complexe QRS) d'expression analytique très différente: une onde carrée, une onde triangulaire et une onde exponentielle. Pour chaque onde, il faut calculer la transformée de Fourier $Tg(\omega)$ puis le spectre de puissance $S(\omega) = |Tg(\omega)|^2$. Il faut ensuite trouver les maxima locaux de $S(\omega)$ pour ω grand, en extraire la plus grande sous-suite monotone (ensemble W), puis en effectuer la régression linéaire en échelle log-log: ceci permet d'obtenir la valeur de la vitesse de décroissance recherchée et, par (11), la dimension correspondante. Les ondes employées dans les calculs ne satisfont pas les hypothèses du théorème 1, c'est-à-dire les équations (3) et (4) (de même pour l'équation (5)). Elles ne possèdent pas une auto-affinité non-triviale et leur degré d'irrégularité est donc insuffisant: ce ne sont pas des courbes fractales. En appliquant la méthode des maxima à de tels signaux, on ne peut relier la pente obtenue à la valeur de la dimension de Bouligand et donc on peut considérer des fonctions menant à des valeurs de α supérieures à trois. Le but principal est de préciser, sur des exemples analytiques simples, un procédé de calcul mathématiquement sain pouvant être automatisé. Les calculs sont directs et les résultats sont donnés dans le tableau 1.

Remarquons que dans ces résultats, α ne dépend jamais des constantes a , b ou d , qui permettent de définir la fonction g , ce qui laisse supposer que seule la *forme* de l'onde influe sur sa valeur. De plus, l'onde triangulaire dont l'exposant α vaut 4 est la convolution de deux ondes carrées, et donc son spectre de puissance est le carré du spectre de puissance associé à une onde carrée. Comme $\alpha_1 = 2$, le spectre d'une onde carrée admet une enveloppe en x^{-2} : il devient évident que l'enveloppe de l'onde triangulaire sera en x^{-4} et que $\alpha_2 = 2\alpha_1 = 4$.

Remarquons enfin que l'expression de l'onde exponentielle fait intervenir un autre paramètre, de concavité, noté d : si d est strictement supérieur à 1, l'onde est concave et si d est inférieur à 1, elle est convexe. Puisque $\lim_{d \rightarrow 0} g_3(t, d) = g_1(t)$, si d tend vers 0 l'onde exponentielle tend vers l'onde carrée. Comme α ne dépend pas des paramètres a , b et d , on peut se demander pourquoi $\alpha_3 \neq \alpha_1$? Il suffit de noter que la fonction $f(t, \omega, d) = g_3(t, d) \cos(\omega t)$ n'est pas *uniformément continue* par rapport à d

Tableau 1.

Description analytique des signaux	Nature des signaux		
	Onde carrée	Onde triangulaire	Onde exponentielle
Constantes	$a, b \in \mathbb{R}_+^*$	$a, b \in \mathbb{R}_+^*$	$b \in \mathbb{R}_+^*, 1 \neq d \in \mathbb{R}_+^*$ $a, p = \frac{\log(d)}{b}, C_0 = \frac{4a^2 b^2 \log^2(d)}{[d-1]^2}$
Équation	$g_1(t) = \begin{cases} a & -b \leq t \leq b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$g_2(t) = \begin{cases} a - \left \frac{a}{b} t \right & -b \leq t \leq b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$g_3(t) = \begin{cases} \frac{a}{d-1} [de^{-p t }-1] & -b \leq t \leq b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
Spectre de puissance	$S_1(\omega) = 4(ab)^2 \frac{\sin^2(\omega b)}{(\omega b)^2}$ $W_1 \equiv \{(\mu_k, \nu_k) : k \gg 1\}$	$S_2(\omega) = \frac{(4a)^2}{b^2 \omega^4} \sin^4\left(\frac{\omega b}{2}\right)$ $W_2 \equiv \{(\mu_k, \nu_k) : k \gg 1\}$	$S_3(\omega) = \frac{4a^2 b^2 \log^2(d)}{[d-1]^2} \frac{[d - \cos(\omega b) - \log(d) \frac{\sin(\omega b)}{\omega b}]}{[(\omega b)^2 - \log^2(d)]^2}$ $W_3 \equiv \{(\mu_k, \nu_k) : k \gg 1\}$
Sous-suite monotone	$\mu_k = \log \left[\frac{(2k+1)\pi}{2b} \right]$	$\mu_k = \log \left[\frac{(2k+1)\pi}{b} \right]$	$\mu_k = \log[(2k+1)\pi]$
de maxima locaux	$\nu_k = \log \left[\frac{16a^2 b^2}{(2k+1)^2 \pi^2} \right]$	$\nu_k = \log \left[\frac{16a^2 b^2}{(2k+1)^4 \pi^4} \right]$	$\nu_k = \log \left[C_0 \left[\frac{d+1}{(2k+1)^2 \pi^2 + \log^2(d)} \right]^2 \right]$
Vitesse de décroissance ($-\alpha$)	$\frac{\log \left[\frac{16a^2 b^2}{(2n+1)^2 \pi^2} \right] - \log \left[\frac{16a^2 b^2}{(2m+1)^2 \pi^2} \right]}{\log \left[\frac{(2n+1)\pi}{2b} \right] - \log \left[\frac{(2m+1)\pi}{2b} \right]} = -2$	$\frac{\log \left[\frac{16a^2 b^2}{(2n+1)^4 \pi^4} \right] - \log \left[\frac{16a^2 b^2}{(2m+1)^4 \pi^4} \right]}{\log \left[\frac{(2n+1)\pi}{b} \right] - \log \left[\frac{(2m+1)\pi}{b} \right]} = -4$	$\frac{\log \left[\frac{C_0(d+1)^2}{[(2n+1)^2 \pi^2 + \log^2(d)]^2} \right] - \log \left[\frac{C_0(d+1)^2}{[(2m+1)^2 \pi^2 + \log^2(d)]^2} \right]}{\log[(2n+1)\pi] - \log[(2m+1)\pi]} \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} -4$

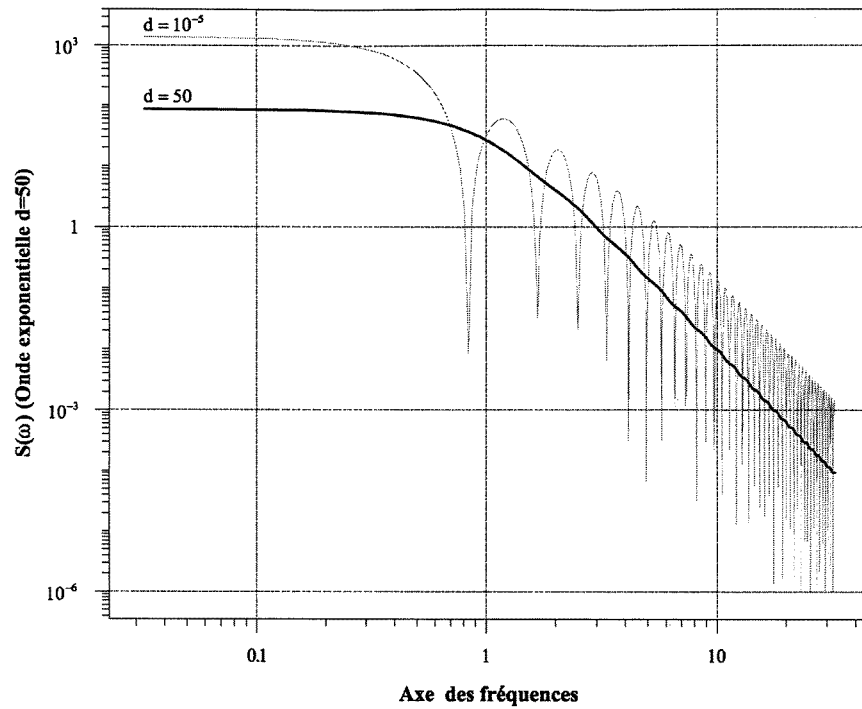


Figure 3. Spectre d'ondes exponentielles ($S_3(\omega)$ dans le texte et le tableau 1). Pour $d = 50$, les oscillations sont négligeables. Par contre, pour $d = 10^{-5}$, on observe de multiples lobes (voir le tableau 1). For $d = 50$, oscillatory behaviour is negligible, but lobes are clearly visible for $d = 10^{-5}$.

pour $d \in]0, 1[$, ce qui montre que la limite et l'intégrale ne sont pas interchangeables. Les remarques précédentes illustrent le rapport intime entre la forme du signal et la valeur de l'exposant calculé. Pour l'onde exponentielle cette méthode n'est profitable que si les lobes sont présents dans le spectre de puissance, ce qui correspond à $d < 1$ (voir la figure 3). Nous prendrons donc $d = 10^{-5}$ dans les calculs numériques.

2. Calculs numériques à l'aide de la méthode des maxima

Comme nous l'avons mentionné à la première section, nous devons, pour chacun des signaux, calculer son spectre de puissance, déterminer la plus grande sous-suite de ses maxima locaux pour en faire une régression, afin de trouver α et la dimension prédite de Bouligand correspondante. Pour le calcul des transformées de Fourier, nous employons la transformée de Fourier rapide (FFT) en base 2 (Brigham 1974). Pour les trois signaux présentés précédemment, le nombre de données retenu est $N = 2^{13} = 8192$.

Nous avons aussi appliqué la méthode à un signal fractal satisfaisant les équations (3) et (5), signal construit à partir de la courbe de Kieswetter (Bélair 1987). Cette dernière est une fonction $K(t)$ nulle part dérivable définie arithmétiquement en $t \in [0, 1]$ par son expansion tétradique: si $t = \sum_j a_j 4^{-j}$ avec $a_j = 0, 1, 2, 3$, alors $K(t) = \sum_j (-1)^{n_j} 2^{-j}$ où $T_j = a_j - 2$ si $a_j > 0$, $T_j = 0$ si $a_j = 0$ et n_j est le nombre de T_k prenant la valeur 0, $k < j$. La dimension de Bouligand du graphe de $K(t)$ est connue et vaut 1,5. Pour cette courbe, nous avons considéré beaucoup plus de données afin de satisfaire (numériquement)

Tableau 2.

Nature du signal	Résultats numériques					
	Méthode des maxima		Méthode usuelle		Valeurs théoriques	
	α	r	α	r	α	r
Onde carrée	1.96	-0.999	1.8	-0.7	2	-1
Onde triangulaire	3.91	-0.999	3.36	-0.813	4	-1
Onde exponentielle	3.52	-0.999	3.52	-0.89	4	-1
Onde de Kieswetter	1.87	-0.993	1.69	-0.62	2	-1

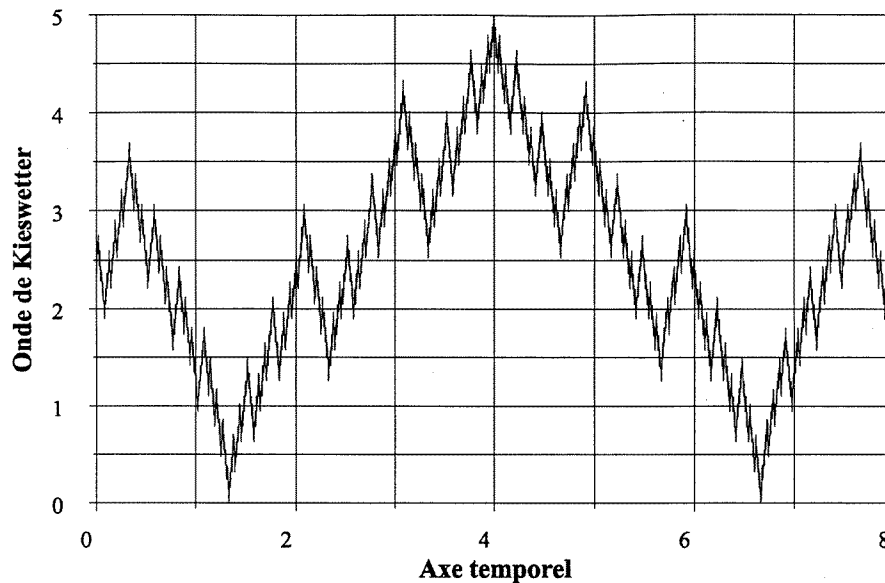


Figure 4. Graphique de l'onde de Kieswetter.
Graph of the Kieswetter function.

le plus possible aux conditions du théorème 2. Nous avons pris $N = 2^{16} = 65\,536$. Les résultats sont moins précis que ceux des autres signaux, à cause de l'irrégularité importante du spectre. Cependant, ils sont toujours plus précis qu'une régression directe sur toutes les données, comme le montre une comparaison des coefficients de corrélation.

Les résultats obtenus à l'aide de notre méthode se trouvent dans le tableau 2. On emploie, pour ces calculs, les valeurs $a = 5$, $b = 4$, $d = 10^{-5}$. L'onde de Kieswetter est l'extension paire de la fonction $K(t)$, normalisée sur l'intervalle de définition $[-b, b]$, avec une amplitude identique aux autres ondes. Des graphiques de l'onde de Kieswetter et de son spectre de puissance sont donnés sur les figures 4 et 5 respectivement.

L'utilisation des TFRs conduit inévitablement à considérer les erreurs de recouvrement qui se produisent autour de la donnée $N/2$ (axe de symétrie du spectre): l'effet de ces erreurs est de sous-estimer α . Il est possible d'éviter cette zone de données en déterminant le plus grand nombre de données consécutives de la plus grande sous-suite de maxima locaux dont le coefficient de corrélation r reste dans une limite de variation permise. Cette

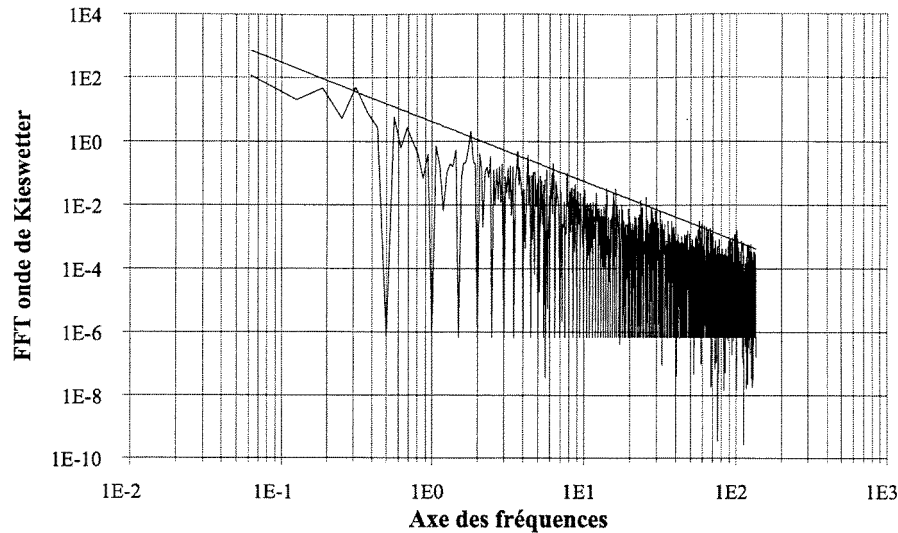


Figure 5. Graphique log–log du spectre de puissance associé à l’onde de Kieswetter ainsi que de la droite de régression sur la plus grande sous-suite monotone de maxima de ce spectre.
Log–log plot of the power spectrum for the Kieswetter function, together with the regression line for the longest monotone subsequence of maxima.

limite peut être fixée sous forme d’un pourcentage d’écart du coefficient de corrélation r par rapport à -1 et être ainsi vues comme la précision de la méthode. Plus les maxima locaux de la sous-suite sont alignés et plus les erreurs de recouvrements sont évitées, autrement, le non-alignement des maxima locaux tend à camoufler les erreurs de recouvrement.

3. Conclusion

Nous avons montré que la méthode des maxima est une méthode saine de calcul de la vitesse de décroissance algébrique d’un spectre de puissance: elle garantit la convergence à partir d’une sélection de données reflétant la décroissance du spectre, sélection effectuée sur la plus grande sous-suite monotone de maxima locaux. Ce sont, en effet, les points les plus proches de l’enveloppe supérieure dont l’existence est prédite par le théorème 2 et donc, les plus susceptibles d’être alignés pour les grandes fréquences. Cette dépendance sur les maxima locaux de la FFT du signal initial, force la méthode à s’améliorer avec une augmentation du nombre de données disponibles pour le calcul de la FFT. Les valeurs du coefficient de corrélation obtenues pour la régression des maxima confirment cette convergence asymptotique, mais possiblement non monotone.

Bien que convergente, ce qui en soit améliore les calculs antérieurs, la méthode proposée est limitée par deux facteurs. D’abord, puisqu’elle repose sur des bornes de l’enveloppe du signal, et non sur le signal lui-même (selon les valeurs des constantes c_1 et c_2 de l’énoncé du théorème 2), les fluctuations de ce dernier peuvent être plus ou moins prononcées. De plus, le résultat en est un de convergence asymptotique pour lequel aucun estimé de la vitesse de convergence n’a été obtenu. Ce problème se complique dans le cas d’une fonction nulle-part différentiable, qui est très difficile à mettre en oeuvre sur un ordinateur. Cette combinaison de limitations dues à la finitude des calculs approchés oblige à asseoir les algorithmes numériques sur des résultats théoriques de convergence, ce que nous avons

présenté ici.

Signalons deux travaux antérieurs sur les aspects méthodologiques de l'évaluation de la dimension fractale à l'aide du spectre de puissance. Tricot (1988) présente une dérivation heuristique de notre équation (11), mais ne l'emploie que sur des fonctions auto-affines. D'après Osborne et Provençale (1989) la dimension fractale de signaux générés par des processus stochastiques peut être évaluée par la décroissance de leurs spectres de puissance. C'est toutefois la dimension de Hausdorff qui y est considérée, et l'intérêt des auteurs réside principalement dans la différentiation d'un signal déterministe plutôt que stochastique.

Des travaux récents ont abordé des méthodes alternatives du calcul de l'exposant dans les spectres en $1/\omega^\alpha$. En particulier, la variabilité du rythme cardiaque a fait l'objet d'études comparatives (Meesmann *et al* 1993, Pilgram et Kaplan 1996a) pour la détermination de l'exposant α . Dans chaque cas, il semble que de meilleurs résultats statistiques soient obtenus en analysant le signal dans le domaine du temps plutôt que dans celui de la fréquence. De plus, la nonstationnarité du signal présente des difficultés supplémentaires d'évaluation (Pilgram et Kaplan 1996b).

Dans notre étude, comme dans toutes celles mentionnées, on postule *a priori* l'hypothèse de la forme $1/\omega^\alpha$ du spectre: aucune méthode ne peut confirmer cette hypothèse, tout au plus peut-on s'assurer d'une évaluation juste de la valeur du paramètre α . Une question plus pertinente concerne la valeur scientifique à attacher au seul calcul de la dimension fractale: même en surmontant les obstacles méthodologiques, comme ceux abordés ici, il n'est pas évident qu'un tel calcul puisse, isolément, apporter une grande contribution à la compréhension d'un système dynamique, soit physique, soit physiologique.

Remerciements

Ce travail a été réalisé alors que le premier auteur bénéficiait d'une bourse du FCAR et que le second auteur était supporté financièrement par le CRSNG et le FCAR.

References

- Bélaïr J 1987 Sur le calcul de la dimension fractale *Ann. Sci. Math. Québec* **11** 7–23
- Brigham E O 1974 *The Fast Fourier Transform* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall)
- Chialvo D and Jalife J 1991 $1/f^\alpha$ Power spectral density of the cardiac QRS complex is not associated with a fractal Purkinje system *Biophys. J.* **48** 525–8
- Falconer K J 1990 *Fractal Geometry* (Chichester: Wiley)
- Golberger A L, Bhargava V, West B J and Mandell A J 1985 On a mechanism of cardiac electrical stability *Biophys. J.* **48** 525–8
- Lewis M and Guevara M 1991 $1/f^\alpha$ power spectrum of the QRS complex does not imply fractal activation of the ventricles *Biophys. J.* **60** 1297–300
- Keshner M S 1982 $1/f$ noise *Proc. IEEE* **70** 212–18
- Osborne A and Provençale A 1989 Finite correlation dimension for stochastic system with power-law spectra *Physica* **35D** 357–81
- Meesmann M, Grüneis F, Flaschenecker P and Kniffki K D 1993 A new method for analysis of heart rate variability: counting statistics of $1/f$ fluctuations *Biol. Cybern.* **68** 299–306
- Papoulis A 1965 *Probability, Random Variables and Stochastic Processes* (New York: McGraw-Hill)
- Peitgen O H, Jürgens H and Saupe D 1992 *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science* (Berlin: Springer)
- Pilgram B and Kaplan D T 1996a A comparison of estimators for the characteristics of $1/f$ noise process *Preprint* (Montreal: McGill University)
- 1996b Nonstationarity and $1/f$ noise characteristics in heart rate *Preprint* (Montreal: McGill University)
- Tricot C 1988 Dimension fractale et spectre *J. Chim. Phys.* **85** 379–84